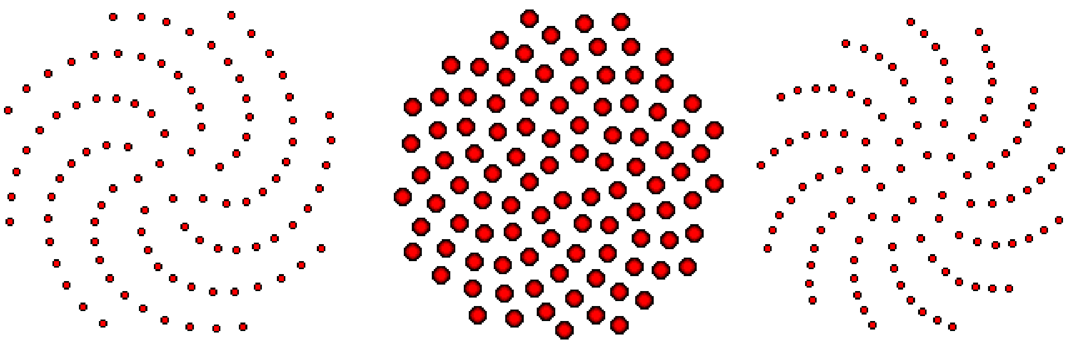
Een ode aan de verbeelding

- Pagina 166: de verwijzing naar Ludwig Wittgenstein heeft betrekking op dit citaat uit de *Philosophical Investigations,* meer bepaald paragraaf 309: “What is your aim in philosophy? -- To show the fly the way out of the fly-bottle.” Het zou veel te ver voeren om hier een uiteenzetting te geven over denken en leven van deze curieuze filosoof maar enkel dit: dat filosofie een bezigheid is en geen theorie is een rode draad doorheen zijn filosofisch denken. Ook in zijn *Tractatus Logico-Philosophicus*, zijn baanbrekend werk in zijn vroege periode staat er letterlijk te lezen dat filosofie geen leer, maar een bezigheid is. Wat hem trouwens brengt tot volgende overweging in verband met de opdracht van de filosoof in paragraaf 6.53: “Die richtige Methode der Philosophie wäre eigentlich die: Nichts zu sagen, als was sich sagen lässt, also Sätze der Naturwissenschaft – also etwas, was mit Philosophie nichts zu tun hat –, und dann immer, wenn ein anderer etwas Metaphysisches sagen wollte, ihm nachzuweisen, dass er gewissen Zeichen in seinen Sätzen keine Bedeutung gegeben hat. Diese Methode wäre für den anderen unbefriedigend – er hätte nicht das Gefühl, dass wir ihn Philosophie lehrten – aber sie wäre die einzig streng richtige.”
- Pagina 167: is de auteur van dit boek een ’68-er? Ja en neen. Neen, omdat ik iets te laat geboren ben, namelijk 1953, dus in ’68 slechts 15 jaar. Iets te jong om al ten volle te beseffen wat er aan de hand was. Maar ja, omdat slechts enkele jaren later al zeer duidelijk werd wat er toen gebeurd was, waren de studentenjaren op de universiteit daardoor zeer diep gekleurd (tot en met bezetting van het rectoraat!). Het heeft ook een zoete smaak nagelaten van schaamteloos dromen: “On arrête tout, on réfléchit et c’est pas triste”, “Sous les pavés la plage” en “L’imagination au pouvoir” kunnen misschien wel onvoorstelbaar naïef zijn maar wat kan daar mis mee zijn? Het gaat om het soort naïviteit die door bijgaande foto perfect wordt geïllustreerd (we zijn in Woodstock!).

- Pagina 175: wie meer wenst te weten over het Clay Mathematics Institute kan het mooie boek lezen van Alex Van den Brandhof, Roland Van der Veen, Jan Van de Craats en Barry Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde. Los ze op en word miljonair!* (Amsterdam: Bert Bakker, 2012). Hierin worden de zeven millennium problemen in voldoende detail uitgelegd zonder al te wiskundig te worden, hoewel moet gezegd worden dat een basiskennis wiskunde bij momenten wel heel erg nuttig kan zijn. Een van de leuke anekdotes in dit verband – helaas is het wel een bevestiging van de wereldvreemdheid van wiskundigen – is dat één van die problemen ondertussen opgelost is. De wiskundige in kwestie, de Rus Grigori Perelman, heeft het evenwel de moeite niet gevonden om de prijs van één miljoen dollar op te halen.

- Pagina 177: Een bewijs dat $x^3 + y^3 = z^3$ geen gehele oplossingen heeft behalve de triviale oplossing $x = y = z = 0$, is niet eenvoudig te noemen. Het standaardbewijs maakt gebruik van complexe getallen en dat vraagt heel wat voorbereiding. Dat sluit echter niet uit dat er elementaire bewijzen kunnen bestaan. In appendix heb ik een artikel opgenomen met wat ik denk één van de elementairste bewijzen te zijn voor dit probleem. Maar, zoals men kan vaststellen, elementair is niet noodzakelijk synoniem met simpel!
- Pagina 178: de referentie voor het artikel van Wiles is: “Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem”, *Annals of Mathematics* 141, 1995, pp. 443-551. De integrale tekst van het artikel is te vinden op: http://www.cs.berkeley.edu/~anindya/fermat.pdf. Hierin ontbreekt wel het aanvullende korte artikel van Richard Taylor en Andrew Wiles waarin een tekortkoming van het oorspronkelijke bewijs wordt rechtgezet. Dat alles gezegd zijnde, ik geraak geen twee pagina’s ver in het artikel!
- Pagina 179: ik moet eigenlijk wel meteen die “ja” nuanceren. Er is een “bewijs” geconstrueerd door T. C. Hales maar dat bewijs omvat een computergedeelte, meer bepaald, worden een groot aantal mogelijke toestanden bekeken door een computerprogramma en wordt er geval per geval nagegaan of bepaalde eigenschappen kloppen of niet. Voor een aantal wiskundigen kan dit nooit als bewijs worden aanvaard, hoogstens geeft het een indicatie dat het antwoord ja is. Hales is ondertussen bezig met het schrijven van een nieuwe versie waarin het computergedeelte geen rol meer zou spelen. Maar het eindresultaat is er nog niet dus kunnen we nog niet echt zeker zijn dat het vraagstuk opgelost is. Dat zal, tussen haakjes, een situatie zijn die we meer en meer zullen zien opduiken in de wiskunde, namelijk dat een gedeelte van het bewijs door een computer wordt overgenomen en dat we de uitkomst van de berekeningen hebben te aanvaarden (of niet). Dit roept zeer interessante vragen op over de al of niet absolute betrouwbaarheid van wiskundige bewijzen.
- Pagina 180: op Wikipedia onder het lemma “Fermat’s spiral” staat de volgende mooie afbeelding:



Al naargelang de hoek waarmee de spiralen draaien, krijg je een verdeling die meer of minder punten omvat. Die in het midden is optimaal. De zogenaamde divergentiehoek is in in dit geval een hoek die zeer dicht bij de gulden snede zit en daardoor beantwoorden de getallen die het aantal spiralen aanduiden aan opeenvolgende getallen in de rij van

Fibonacci, bijvoorbeeld 13 en 21, en zodoende komt dus alles bij elkaar samen. Dat de gulden snede te maken heeft met de rij van Fibonacci is door het feit dat de verhouding van twee opeenvolgende getallen in de rij als limiet precies dat bijzondere getal heeft.

- Pagina 185: voor 2002 lag het aantal dodelijke verkeersslachtoffers op 12+ per honderd duizend. Dus dat is een kans van, ruw geschat, 1 op 10.000. Het is natuurlijk niet correct om te zeggen dat in 2013 je een kans hebt van 1 op 10.000 om het einde van het jaar niet te halen. Of je wel of niet chauffeur bent, hoe vaak je in het verkeer zit, enzovoorts, enzoverder, al deze factoren spelen een rol maar als gemiddelde is het wel bruikbaar. Vergelijk even met de Lotto waar de kans op de grote prijs, rang één, iets minder dan 1 op 5 miljoen bedraagt! Ik weet wel dat we dit op jaarbasis moeten bekijken maar dan wordt de berekening iets complexer – hoewel je in dit geval een eerste-ordebenadering mag gebruiken en 1 op 5 miljoen vermenigvuldigen met 100, zijnde ruwweg het aantal trekkingen per jaar, en dat geeft een schatting van 1 op 50.000 – maar in ieder geval bij een betere benadering geraak je zeker niet hoger dan 1 op 50.000, laat staan 1 op 10.000.

- Pagina 187: de dood is een rare zaak. In *Personality and Social Psychology Review* toont een studie aan dat mensen die gedwongen worden aan de dood te denken, zich positiever opstellen en gezonder beslissingen nemen dan in normale omstandigheden (aldus de rapportering in *Knack*). Ik koppel er de gedachte aan (die trouwens in het artikel ook wordt geopperd) dat oud worden een tweede pubertijd is. De gelijkenissen zijn te opvallend. Je (her)ontdekt het eigen lichaam waar je geen blijf mee weet. Seksualiteit is een niet eenvoudig gegeven, weliswaar van een andere aard maar even intensief, zoveel is duidelijk. Je kijkt uit naar het einde van de overgangsperiode, in het ene geval om volwassen te worden, in het andere geval om eindelijk vrij te zijn. Dit zou nog eens tot het einde moeten doorgedacht worden maar dat het gaat om een transitie lijkt mij duidelijk.

- Pagina 189: er is al veel te doen geweest over deze fameuze zin van Martin Heidegger, die thuishoort in *Was ist Metaphysik?*. Vooral logici en analytische filosofen hebben zich vrolijk gemaakt over deze rare zin – "Het niets nietst" – maar aan de andere kant blijft het wel zo dat het heel moeilijk praten is over het niets. Je kan niet zeggen dat het niets bestaat want dan is niets iets en dat kan niet. Maar zeggen dat het niets niet bestaat brengt evenzeer met zich mee dat er een onderwerp is waarover gesproken wordt (en waarvan wordt gezegd dat het niet bestaat). Dus noch het één, noch het ander. Tsja, wat doet dat niets dan? Antwoord: nietsen. Ik geef toe dat ik er zelf ook niet zo veel kan mee aanvangen maar de poëtische waarde is zeer groot en dat moet toch aanvaardbaar klinken, ook voor Heidegger?

- Pagina 189: De frase "so it goes" komt herhaalde keren voor in *Slaughterhouse Five* van de Amerikaanse auteur Kurt Vonnegut. Meer bepaald, iedere keer als er een soldaat sneuvelt staat tussen haakjes te lezen: "so it goes". Een briljante manier om uit te drukken dat een leven precies dat is, een leven, niet meer, niet minder. Want ja, zo gaat dat!

- Pagina 192 (besluit): dit is een verwijzing naar het beroemde essay van Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe*.

Method of Infinite Descent and proof of Fermat's last theorem for $n = 3$

R. A. D. Piyadasa

Department of Mathematics, University of Kelaniya, Sri Lanka

Abstract: Fermat proved one of his theorems that the area of a Pythagorean triangle can not be a square of an integer using his powerful mathematical tool of method of infinite descent and the most general parametric solution of the corresponding equation. This proof can directly be used to prove his last theorem for $n = 4$ although Euler proved it later using the method of infinite descent. It is well known that Euler's proof of Fermat's last theorem for $n = 3$ (FLT3) using Fermat's mathematical tool and a parametric solution of the equation is incomplete. It is pointed out that if Euler used the general parametric solution of the equation and the then available and rather old method of finding the roots of a cubic of Tartagalia and Cardan, proof of FLT3 could have done easily without making no room for an error.

Key words: Fermat's last theorem, Euler's proof, Method of infinite descent, Contradiction

1. INTRODUCTION

The first proof of Fermat's last theorem for the exponent $n = 3$ was given by Leonard Euler using the famous mathematical tool of Fermat called the method of infinite decent. However, Euler did not establish in full the key lemma required in the proof. Since then, several authors have published proofs for the cubic exponent but Euler's proof may have been supposed to be the simplest. Paulo Ribenboim [1] claims that he has patched up Euler's proof and Edwards [2] also has given a proof of the critical and key lemma of Euler's proof using the ring of complex numbers. Recently, Macys in his recent article [3, Eng.Transl.] claims that he may have reconstructed Euler's proof for the key lemma. However, in this author's point of view, none of these proofs is short nor easy to understand compared to the simplicity of the theorem and the method of infinite decent

The main objective of this paper is to provide a simple, short and independent proof for the theorem using the method of infinite decent to point out that the Fermat famous method of infinite decent can be used easily to prove the Fermat's last theorem for $n = 3$ as in the case of $n = 4$ obtaining the general parametric solution of the equation. It is assumed that the equation $z^3 = y^3 + x^3, (x, y) = 1$ has non trivial integer solutions for (x, y, z) and their parametric representation [5] is obtained with one necessary condition that must be satisfied by the parameters. Using this necessary condition, an analytical proof of the theorem is given using the method contradiction. The proof is based on the method of finding roots of a cubic formulated by Tartagalia and Cardan [4], which is very much older than Fermat's last theorem.. It should be noted that parametric solution for x, y, z is obtained to make the proof clear. The proof can be given obtaining only the necessary condition satisfied by parameters thus making the proof much shorter. It should be emphasized that the main objective of this paper is to point out that the importance of Euler's proof if Euler used the then available literature and the general parametric solution[5] of the Fermat equation.

2. PARAMETRIC SOLUTION OF THE EQUATION

Let us assume that the equation

$$z^3 = y^3 + x^3, \ (x, y) = 1. \tag{1}$$

has a non trivial integer solution for (x, y, z) .Now, the parametric representation of (x, y, z) is obtained using the following three simple lemmas.

Lemma.1

If $a^3 - b^3 \equiv 0 (\text{mod}\, 3^m)$, $(m \neq 0)$ and $(a,3) = (b,3) = 1$, then $a \equiv b (\text{mod}\, 3^{m-1})$ and $m \geq 2$.

If we assume $a^3 - b^3 = 3^{3m} t^3$ and $(a,b) = 1$ in addition to $(a,3) = (b,3) = 1$, then $a - b = 3^{3m-1} u^3$, where u is a factor of t.

Proof:

$$F(a,b) = a^3 - b^3 = (a-b)\,[(a-b)^2 + 3\,ab)] \tag{2}$$

and it follows from (2) that $a \equiv b (\text{mod}\, 3^{m-1})$ and $m \geq 2$ since $(3, ab) = 1$.

Now let $F = 3^{3m} t^3 = a^3 - b^3$, $(3,t) = 1$. Then we can write $a = b + 3^{3m-1} f$, $(3, f) = 1$ from the first part of the lemma, and $(f, ab) = 1$ since $(a,b) = 1$.

$$F(a,b) = 3^{3m} t^3 = a^3 - b^3 = 3^{3m} f (b^2 + 3^{3m-1} fb + 3^{6m-3} f^2) \tag{3}$$

Hence f is a cube and let $f = u^3$. This completes the proof of the Lemma.1

Lemma.2

If the equation

$$z^3 = y^3 + x^3, \ (x, y) = 1. \tag{4}$$

has a non trivial integer solution for (x, y, z), then $xyz \equiv 0 (\text{mod}\, 3)$.

Proof:

If $z = y + s$, we obtain from (4),

$$3sy.(y + s) = x^3 - s^3 \tag{5}$$

Now, if $3 \mid s$, then $3 \mid x$, and if 3 does not divide s, then 3^2 divides the right-hand side of (5) by Lemma.1. Hence 3 divides y or $y + s = z$. Therefore $xyz \equiv 0 (\bmod 3)$.

Let all integers in (4) are positive and $y \equiv 0 (\bmod 3)$. Then (1) takes the form

$$z^3 - x^3 = 3^{3m}\ t^3, (3,x) = (3,t) = (z,x) = 1 \tag{6}$$

Lemma.3

$z - x = 3^{3m-1}u^3$, where u is a factor of t and $(3,u) = 1$.

This follows at once from Lemma.1 and the equation (6) can, now, be written as

$$z^3 = 3^{3m}u^3e^3 + x^3 \tag{7}$$

where $(3,u) = (3,e) = (u,e) = 1$.

Let us now obtain the parametric solution of Fermat equation and a necessary condition that must be satisfied by the parameters as in [5]. In order to do this, we first show that $z - y$ is a cube and determines the factors of $x + y - z$.

From (1), $(z - y)[(z - y)^2 + 3zy] = x^3$ and $(z, y) = (3, z) = 1$, and we deduce that $(z - y)$ and $[(z - y)^2 + 3zy]$ are co-prime. Hence, $(z - y)$ is a cube and let $z - y = h^3$, where h is a factor of x. Then (5) can be written as

$$3yh^3(y + h^3) = x^3 - h^9 \tag{8}$$

$x + y - z = x - (z - y) = x - h^3$, and since h is a factor of x, it is a factor of $x + y - z$. To find the other factors of $x + y - z$, consider (1) in the form $z^3 = (x + y)[(x + y)^2.-3xy]$. It follows from $(x, y) = (3, x) = 1$ that $(x + y)$ and $[(x + y)^2 - 3xy]$ are co-prime and hence they are also cubes and if $z = gr$, where $(g,r) = 1$, then $(x + y) = g^3.[(x + y)^2 - 3xy] = r^3$.

$(x + y) - z = g^3 - gr = g(g^2 - r)$

$x + y - z = y - (z - x) = 3^m ue - 3^{3m-1}u^3 = 3^m u(e - 3^{2m-1}u^2)$

and hence $x - h^3 = x + y - z \equiv 0 (\bmod 3^m ugh)$ since $(g,r) = (e,u) = 1$. Now, consider (8) in the form $3^{m+1}ueh^3 g\, r = (x - h^3)[(x - h^3)^2 + 3xh^3)$, to conclude that $x - h^3 = 3^m ugh$, and since $z - x = 3^{3m-1}u^3$,

$$x = 3^m ugh + h^3 \tag{9}$$

$$y = 3^m ugh + 3^{3m-1} u^3 \tag{10}$$

$$z = 3^m ugh + 3^{3m-1} u^3 + h^3 \tag{11}$$

In addition to this, we have $x + y = g^3$ and therefore from (9) and (10), we get

$$g^3 - h^3 - 2.3^m ugh - 3^{3m-1} u^3 = 0 \tag{12}$$

In the next section, we will prove the Fermat's last theorem using the method of infinite descent assuming that all $x, y, z > 0$. The assumption $x, y, z > 0$ is justifiable since we must consider the Fermat equation for all non-zero integers.

3. PROOF OF FERMAT'S LAST THEOREM FOR $n = 3$

Proof.

We prove Fermat's last theorem for $n = 3$ by showing that there are no integer parameters satisfying the equation (12) using the method of infinite descent and the method of Tartagaalia and Cardan[4]. Let us first assume that all $x, y, z > 0$ and $y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Then we can use the necessary condition

$$g^3 - h^3 - 2.3^m ugh - 3^{3m-1} u^3 = 0 \tag{13}$$

satisfied by the parameters to prove the theorem.

In this equation, $u, g, h, 3$ are co-prime numbers , and let us fix the parameters u, m of y and find g, a factor of z in (1), for different h which is a factor of x. It is clear from Lemma.1 and (13) that $g - h = 3^{m-1} j$, or $g = 3^{m-1} j + h$, where $(j, 3) = 1$ and $m \geq 2$ unless $uh = 0$ since $g^3 \equiv h^3 (\mathrm{mod}\, 3^m)$.

The equation (13) is of the form

$$g^3 - 3vwg - v^3 - w^3 = 0 \tag{14}$$

where $3^{3m-1} u^3 + h^3 = v^3 + w^3$, $2.3^{m-1} uh = vw$, and using the method of Tartagalia and Cardan [4], its roots can be written as

$$v + w, v\omega + w\omega^2, v\omega^2 + w\omega. \tag{15}$$

ω being the cube root of unity. v^3, w^3 are the roots of the equation

$$t^2 + Gt - H^3 = 0 \tag{16}$$

where $H = -2.3^{m-1} uh$ and $G = -3^{3m-1} u^3 - h^3$ [4]. Discriminant of (13) is 27Δ, where Δ given by $\Delta = -[G^2 + 4H^3] = -[3^{6m-2} u^6 - 14.3^{3m-3} u^3 h^3 + h^6] = -[(3^{3m-1} u^3 - h^3)^2 + 4.3^{3m-3} u^3 h^3]$. It is clear that Δ is negative when $uh > 0$. Therefore v, w are real and distinct and (13) has only one real root [4], namely, $g = v + w$. Assume that v, w are integers. Since $(u,3) = (g,3) = 1$ and $vw = 2uh3^{m-1}$, we can write

$$g = 3^{m-1} v_1 + w_1 = 3^{m-1} j + h \tag{17}$$

where $(3, w_1) = (3, v_1) = 1$, $v_1 w_1 = 2uh$. If g is even, then both h, u are odd which follows from the fact that z of the Fermat equation is even and u, h are the factors of odd y and x respectively. Since $v_1 w_1 = 2uh$ and u, h are odd, v_1, w_1 should be opposite parity since either v_1 and w_1 mist carry the only even factor 2. Therefore g cannot be even. Now, assume that one of u, h even. In general, the both u, h may be composite. Assume that u is even, and let $g = 3^{m-1} 2u_1 h_1 + u_2 h_2 = 3^{m-1} j + h$, where u_1, u_2 are co-prime factors such that $u_1 u_2 = u$ and u_1 is even. Also, $h_1 h_2 = h$ and $(h_1, h_2) = 1$. Then, we must have

$$3^{3m-1} u^3 + h^3 = 8..3^{3m-3} u_1^3 h_1^3 + u_2^3 h_2^3 = 3^{3m-3} v_1^3 + w_1^3 \tag{18}$$

Since $3^{3m-1} u^3 = 8.3^{3m-3} u^3 + 3^{3m-3} u^3 = 8.3^{3m-3} u_2^3 u_1^3 + 3^{3m-3} u_1^3 u_2^3$, it follows from (18) that

$$3^{3m-1} u^3 + h^3 = 8.3^{3m-3} u_1^3 u_2^3 + 3^{3m-3} u_1^3 u_2^3 + h_1^3 h_2^3 = 8.3^{3m-3} u_1^3 h_1^3 + u_2^3 h_2^3 \tag{19}$$

$$(h_1^3 - u_2^3)(3^{3m-3}.8.u_1^3 - h_2^3) = 3^{3m-3} u_2^3 u_1^3 \tag{20}$$

It follows, at once, from (20) that $(h_1^3 - u_2^3) = 3^{3m-3} u_1^3$ and $3^{3m-3}.8.u_1^3 - h_2^3 = u_2^3$. In other words, we must have

$$h_1^3 = 3^{3m-3} u_1^3 + u_2^3 \tag{21a}$$

$$3^{3m-3}.2^3.u_1^3 = u_2^3 + h_2^3 \tag{21b}$$

If we assume, $g = 3^{m-1} u_3 h_3 + 2u_4 h_4$, where u_4 is even, $u = u_3 u_4, h = h_3 h_4, (u_3, u_4) = (h_3, h_4)$, in exactly the same manner, we are lead to the equations

$$(8u_4^3 - h_3^3)(h_4^3 - 3^{3m-3} u_3^3) = 3^{3m-3} u_4^3 u_3^3 \tag{22}$$

$$h_4^3 = 3^{3m-3} u_3^3 + u_4^3 \tag{23a}$$

$$2^3 u_4^3 = 3^{3m-3} u_3^3 + h_3^3 \tag{23b}$$

Let $z = 3^m ugh + 3^{3m-1} u^3 + h^3$ is the least of all integral z satisfying (1), then we have $h_1, h_4, 3^{m-1}2, u_1, 2u_4 < z$ for all z values of Fermat equations (21a),(21b),(23a),(23b) of $n = 3$ leading to a contradiction. Then it follows from the method of infinite decent that (1) has no solutions integers. Proof of the theorem for even h and odd u follows exactly the same way as before.

Next, we consider the case $z \equiv 0 (\bmod 3)$ and discuss the proof of the theorem briefly. If $z \equiv 0 (\bmod 3)$, the parametric solution of (1) can be obtained in the same way as before or deduce at once, and the necessary condition (12) now becomes

$$g^3 + h^3 + 2.3^m ugh - 3^{3m-1} u^3 = 0 \tag{24}$$

where g is, now, a factor of $y = z - h^3$ and $z = 3^m ue$, $x + y = 3^{3m-1} u^3$. Also, one deduces at once that

$$\Delta = -[G^2 + 4H^3] = -[3^{6m-2} u^6 + 14.3^{3m-3} u^3 h^3 + h^6] < 0$$

to conclude that (24) has only one real root as before. The rest of the proof follows exactly the same way. The only difference is $v_1 w_1 = -2uh$ but our g should be positive with the opposite signs of v_1 and w_1. Therefore we write down only resulting two equations corresponding to $g = 3^{m-1} 2u_1 h_1 - u_2 h_2 > 0$, where $u = u_1 u_2, u_1$ is even, u_2 is odd, $(u_1, u_2) = (h_1, h_2) = 1$, as

$$h_1^3 = 3^{3m-3} u_1^3 + u_2^3 \tag{25a}$$

$$u_2^3 = 3^{3m-3}.2^3.u_1^3 + h_2^3 \tag{25b}$$

since $3^{3m-3}.8.u_1^3 h_1^3 - u_2^3 h_2^3 = 3^{3m-1} u^3 - h^3$. Both of (25a) and (25b) are Fermat equations with lesser z values than that of (1). Hence, the proof follows again from the method of the infinite decent.

Acknowledgement

The author would like to express his deep thanks to Dr.K.T.Somarathna for his assistance in this research work.

References

(1). P. Ribenboim, Fermat's last theorem for amateurs, Springer-Verlag, New York,1999.

(2) H.M. Edwards, Fermat's last theorem, A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory, Springer -Verlag, 1977.

(3) J.J.Macys, On Euler's Hypothetical Proof, Math. Notes , Vol.82, No.3, (2007) p.352-356.

(4) J.W.Archbold, Algebra, Sir Issac Pitman & Sons LTD., London, 1961, p.174-176.

(5) R.A.D.Piyadasa, Simple analytical proofs of Fermat's last theorem for $n = 3$, CMNSEM, Vol.1 No.3, April 2010, p.64-70.